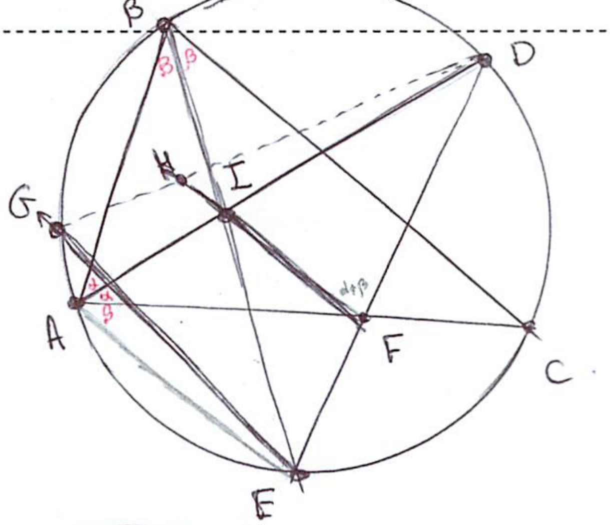
შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13 | 25.04.2015/ მათ/III/ 609

ამოცანა № 1 | გვერდი № 1



$\angle BAI = \angle IAC \equiv \alpha$

$\angle ABI = \angle IBC \equiv \beta$.

$\angle AIE = \dfrac{\breve{BD} + \breve{AE}}{2} = \alpha + \beta$

$\angle AFE = \dfrac{\breve{DC} + \breve{AE}}{2} = \alpha + \beta$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ □AIFE ჩაწერილია ანუ

$\boxed{\text{D არის } \breve{BC}\text{-ის შუაწერტილი}}$ $\angle IFD = \angle IAE = \alpha+\beta$. $IF \parallel GE$ ანუ $\angle GEF = \alpha+\beta$

ხოლო $\angle DGE = \dfrac{\breve{EC} + \breve{DC}}{2} = \alpha+\beta$. ანუ $\triangle EGD$ ტოლფერდაა (ანუ $\breve{DBG} = \breve{DCE}$ ანუ $\breve{BG} = \breve{EC}$ ანუ $EG \parallel BC$)

შესაბამისად $\triangle HFD$-ც ტოლფერდაა (ანუ $\angle DHF = \alpha+\beta$). შევამჩნიოთ რომ BC-ს შუამართობი მიდის (რომელიც გადის D-ზე ვიცით) (რადგან $HF \parallel GE \parallel BC$, ანუ HF-ის შუამართობი = BC-ს შუამართობს) $\triangle DHF$ სიმეტრიულია, ხოლო B-ს სიმეტრიული წერტილი არის C (H-ის სიმეტრიულია F) ანუ საკმარისია ვაჩვენოთ რომ CF არის მხები $\omega(HFD)$-სი $\Rightarrow$ BH-იც მხებია: (სიმეტრია)

ხოლო $\angle DFC = \angle AFE = \alpha+\beta = \angle DHF$ $\Rightarrow$ CF მხებია ანუ BH მხები $\omega(HFD)$

რ.დ.გ.

შენიშვნა: ცხადია რომ HF-ის შუამართობი იგივეა რაც GE-ს შუამართობი, ხოლო GE-ს შუამართობი იგივეა რაც BC-ს, რადგან $BC \parallel GE$

$a_1 = f(a)$ $a_2 = f(a_1) = f(f(a))$ ცხადია რომ $a_n = \underbrace{f(f(\dots f}_{n\text{-ჯერ}}(a)))$

ანალოგიურად b-ზეც, ანუ შეგვიძლია ისე ვთქვათ რომ a_n და b_n არის შესაბამისად a-ზე და b-ზე n-ჯერ ჩატარებული ოპერაციით მიღებული რიცხვები.

~~(1) შევნიშნოთ რომ თუ $b>a$ მაშინ $b_n > a_n$ ყოველი n-სთვის: შევნიშნოთ, რომ ამისათვის დავამტკიცოთ~~

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ $(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) \geq 0$ ყოველი n-სთვის.
ეს ნიშნავს იმას რომ ყოველი n-სთვის a_n და b_n ორივე ინტერვალ-
ვე შუალედებში ვერ იქნებიან $(0;\frac{1}{2})$ და $[\frac{1}{2};1)$ შესაბამისად ერთდროულად.
იმიტომ, რომ, თუ ვთქვათ რომ ხდება $a_n \in (0;\frac{1}{2})$ და $b_n \in [\frac{1}{2};1)$ მაშინ

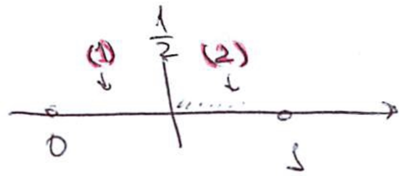
$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $a_{n+1} - a_n > 0$

$b_{n+1} = b_n^2 = b_n \cdot b_n < 1 \cdot b_n = b_n$ ანუ $b_{n+1} - b_n < 0$

მივიღე რომ $(a_{n+1} - a_n)(b_{n+1} - b_n) < 0$ და რაც წინააღმდეგობაა.

ანუ მიიღეს ინტერვალზე შუალედებში ვერ ყოფნის, შესაბამისად ყოველ ნაბიჯზე ერთდროულად ოპერაცია სრულდება ($+\frac{1}{2}$ -ს დამატება 1-ლი ოპერაციის, და კვადრატში აყვანის მე-2 ოპერაცია).

შესაბამისად $(0; \frac{1}{2})$ შუალედს დავარქვათ პირველი შუალედი და $[\frac{1}{2}; 1)$-ს მე-2 შუალედი



თუ რიცხვი არის (1) შუალედში მაშინ ოპერაციის ჩატარების მერე აუცილებლად (2) შუალედში ჩავარდება, ხოლო ვაჩვენოთ რომ თუ რიცხვი (2) შუალედშია, მაშინ სასრული ოპერაციების მერე აუცილებლად ჩავა (1)-ელ შუალედში:

ეს იმიტომ რომ თუ $x \in [\frac{1}{2}; 1)$ და დავუშვათ საწინააღმდეგო არ ჩავიდა (1)-ში მაშინ $f(x) = x^2$ $f(f(x)) = x^4$ $f_3(x) = x^8$ ...

$f_n(x) = x^{2^n}$ ხოლო $x; x^2; x^3; \ldots$ არის გეომეტრიული პროგრესია, $k = x < 1$ და რადგან $k < 1$ ეს ნიშნავს იმას რომ რაღაც ბიჯის შემდეგ რიცხვი გახდება ანუ $\frac{1}{2}$ ზე ჩამოცდება ქვემოთ, ანუ მივიღეთ წინააღმდეგობა.

შესაბამისად ჩვენი დაშვებიდან ვნახეთ, რომ (2)-დან რაღაც სასრულ ბიჯში რიცხვი ჩავა (1)-ში მერე ისევ (2)-ში და ასე ხტუნავს ამ შუალედებში.

შევამჩნიოთ ისიც რომ $b_n > a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ სთვის, ეს იმიტომ რომ, რადგან ვიცით რომ ორივე წევრი a_{n-1} და b_{n-1} სულ ერთდროულად

ოპერაციები უცვლელია, ე 1-ლი ოპერაციის ბიჯის მაქსიმუმს არ შეცვლის, რაც შემდეგ ვიციით ~~[illegible]~~ $g(x)=x^2$ ის ზრდადი ფუნქცია $x>0$ სად, ~~[illegible]~~ ანუ ხდება $\boxed{b>a \Rightarrow b_n > a_n}$

როგორც ვხედავთ a_n-ები და b_n-ები იცვლება ამ 2 ოპერაციით 1 ნაბიჯის ... ოპერაციის შემდეგ (რაც ... (1)-ში და შემდეგ ... (2)-ში, ან პირიქით, ეს იგივე (განსხვავება) "გადასვლები" 2 ცალი ნაბიჯით და ისე ... ამ ოპერაციების. ... თავიდან რიცხვი a_k და b_k "სწორად" მაშინ a_k-ს ~~შევნიშნოთ რომ ... a და b_k-ს (ანალოგ)~~ შევხედოთ როგორც a_0-ს და b_k-ს როგორც b_0-ს (ანალოგიურ რაც ... (k-1) ...) მაშინ ცხადია რომ $a_0 < b_0$ და ამასთან $\frac{1}{4} \le a_0$ ეს იმიტომ რომ (2) და (1)-ში რაც ... ~~a_k^2~~ $a_0 = a_{k-1}^2 \ge \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

ანუ $\frac{1}{4} \le a_0 < b_0$

ახლა ჩავწეროთ $b_0 = a_0 + r$ $r>0$ ცხადია, რადგან a_0 და b_0

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

25.04.2015/ მათ/III/ 609

ამოცანა № 2

ასევე (1)-ში ~~...~~ 1-ლი ოპერაცია ჩატარდება ჯერ და მერე მეორე

ანუ $a_1 = a_0 + \frac{1}{2}$ $b_1 = b_0 + \frac{1}{2}$. $\boxed{\text{ვთქვათ } b_1 = a_1 + r}$ იქნება

$\cancel{a_2 = (a_0 + \frac{1}{2})^2}$ $a_2 = a_1^2$ $b_2 = b_1^2$.

$$b_2 - a_2 = b_1^2 - a_1^2 = (a_1 + r)^2 - a_1^2 = 2a_1 r + r^2 > 2a_1 r$$

$a_1 = a_0 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ ანუ $b_2 - a_2 > 2a_1 r \geq 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot r = \frac{3}{2} r$

ანუ მივიღეთ რომ თუ ბოლოს სხვაობა იყო r, მე-(2)-ში გადასვლის მერე გახდება $\frac{3}{2}r$ მაინც ანუ სხვაობა $\frac{3}{2}$-ჯერ მაინც იზრდება ამ 2 სვლით ახლა იქნება იგ გამოვიყენოთ რომ რადგან სვლები სანამ (a_n) და (b_n) არ ტოლდება ისევ (1)-ში (სხვაობა რომ სხვაობა არ მცირდება ამ ოპერაციით, რადგან $+\frac{1}{2}$-ით სხვაობას არ ცვლის და თუ $a_i \in (2)$ და $b_i \in (2)$ მაშინ $\cancel{a_{i+1} \; b_{i+1} = a_i^2}$

$$b_{i+1} - a_{i+1} = b_i^2 - a_i^2 = (b_i - a_i)(b_i + a_i)$$ და $b_i > a_i \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ $b_i + a_i > 1$ ანუ $b_{i+1} - a_{i+1} > b_i - a_i$ ყოველი i-სთვის)

მერე იქნება ისევ მეორე ოპერაცია, და მივიღებთ რომ სხვაობა გახდება მინიმუმ $(\frac{3}{2})^2 \cdot r$ და ა.შ. რაღაც ვაჩვენე

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

25.04.2015/ მათ/III/ 609

ამოცანა № 2

გვერდი № 5

(2) შემთხვევიდან (1)-ში დავწერეთ ყოველთვის ~~...~~ ხდება, ეს რომ ვაჩვენოთ რომ სხვაობა a_n-ს და b_n-ს შორის ხდება ~~...~~. $\left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot r$-ზე მეტი $\forall m \in \mathbb{N}$ სთვის ჩვ წინააღმდეგობა ავტომატურად დამტკიცდა, იმიტომ რომ $r \neq 0$ და $\left(\frac{3}{2}\right)^m \cdot r$ როცა $m \to \infty$ ლიმიტი ჩ'ამ ნებისმიერის მნიშვნელობაც $\forall$ რიცხვს გადააჭარბებს ანუ ~~...~~ ~~...~~ როცა k-სთვის $b_k - a_k > 2$ მაგრამ

$b_k; a_k \in (0;1) \Rightarrow b_k - a_k < 1$ ჩვ წინააღმდეგობა

ანუ ~~...~~ ჩვენ n-სთვის ხდება ის, რომ

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0$$

6

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

25.04.2015/ მათ/III/ 609

ამოცანა № 3

გვერდი № 1

$7x^2-13xy+7y^2=(|x-y|+1)^3$ უნდა ამოვხსნათ $\mathbb{Z}$-ში.

ცხადია რომ თუ $(x;y)$ არის ამონახსნი, მაშინ იქნება $(y;x)$ ამიტომ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ $x \geq y$ (და მერე მიღებულ პასუხებს ~~[illegible]~~ ანალოგიურ შებრუნებულ პასუხი)

$x-y \equiv a$. $a \geq 0$

$$7x^2-13xy+7y^2 = \cancel{7a^2+xy} \; 7(x-y)^2+xy = 7a^2+xy$$

$$7a^2+xy=(a+1)^3$$

$$\Longleftrightarrow 7a^2+xy=a^3+3a^2+3a+1$$

$$\Longleftrightarrow 4a^2-3a-1=a^3-xy$$

~~$(4a+1)(4$~~

$$\Longleftrightarrow (4a+1)(a-1)=a^3-xy$$

$x+y \equiv b$ მაშინ $4xy=b^2-a^2$.

$$\Longleftrightarrow (4a+1)(4a-4)=4a^3-4xy$$

$$\Longleftrightarrow (4a+1)(4a-4)=4a^3-b^2+a^2$$

$$\Longleftrightarrow (4a+1)(4a-4)=a^2(4a+1)-b^2$$

$$\Longleftrightarrow (4a+1)(4a-a^2-4)=-b^2$$

$$\Longleftrightarrow (4a+1)(a-2)^2=b^2$$

$\boxed{7}$

$a=2$ ცალკე უნდა განვიხილოთ წინა, მაშინ ამ შემთხვევაში გამოდის $4a+1=4\cdot 2+1=9=3^2$ სრული კვადრატი! ამიტომ ეს [illegible] შეფასება

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13	25.04.2015/ მათ/III/ 609

ამოცანა № 3 | გვერდი № 2

რომ დავუშვებდეთ a-ს და b-ს [illegible] [illegible] შეგვიძლია დავუშვათ რომ $a\geq 0$ და a და b [illegible] [illegible].

$(4a+1)(a-2)^2=b^2.$ $\Rightarrow$ ~~$4a+1=x^2$~~ ~~$a=\frac{(x-1)(x+1)}{4}$~~

$\Rightarrow$ ~~$4a+1=x^2$~~ $4a+1=?^2$ ცხადია ? კენტია ანუ

~~$4a+1=(2z+1)^2$~~ $4a+1=(2z-1)^2$ სადაც $z\in\mathbb{N}$

$4a+1=4z^2-4z+1$ $\boxed{a=z^2-z}$ ჩავსვათ ზემოთ,

მივიღებთ $(2z-1)^2\cdot(z^2-z-2)^2=b^2.$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} b=(2z-1)(z^2-z-2) \\ b=(1-2z)(z^2-z-2) \end{array}\right.$$

შესაბამისად
$$\begin{cases} x=\frac{a+b}{2}=\frac{z^2-z+(2z-1)(z^2-z-2)}{2} \\ y=\frac{b-a}{2}=\frac{(2z-1)(z^2-z-2)-z^2+z}{2}. \end{cases}$$

და
$$\begin{cases} x=\frac{a+b}{2}=\frac{z^2-z+(1-2z)(z^2-z-2)}{2} \\ y=\frac{b-a}{2}=\frac{(1-2z)(z^2-z-2)-z^2+z}{2}. \end{cases}$$

8

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

25.04.2015/ მათ/III/ 609

ამოცანა № 3

გვერდი № 3

ცხადია რომ ∀z-სათვის ~~...~~ x-იც და y-იც მთელი მიიღება, ვინაიდან

z^2-z და $(z^2-z-2)(2z-1)$ ერთნაირი ლუწ-კენტობისაა ანუ $a\equiv b \pmod 2$

საიდანაც კი ნათლად ჩანს რომ $x;y\in\mathbb{Z}$

შესაბამისად, რადგან სიმეტრიულია ვარიანტი ჩვენ ვიღებთ ∀ ~~...~~ $z\in\mathbb{N}$-სათვის

აღნიშნული ამონახსნები იქნება:

$$(x;y)=\left(\frac{z^2-z+(2z-1)(z^2-z-2)}{2};\ \frac{(2z-1)(z^2-z-2)-z^2+z}{2}\right)\quad \forall z\in\mathbb{N}$$

$$(x;y)=\left(\frac{z^2-z+(1-2z)(z^2-z-2)}{2};\ \frac{(1-2z)(z^2-z-2)-z^2+z}{2}\right)\quad \forall z\in\mathbb{N}$$

და სიმეტრიის გამო $(x;y)\leftrightarrow(y;x)$ ვიღებთ

$$(x;y)=\left(\frac{(2z-1)(z^2-z-2)-z^2+z}{2};\ \frac{z^2-z+(2z-1)(z^2-z-2)}{2}\right)\quad \forall z\in\mathbb{N}$$

$$(x;y)=\left(\frac{(1-2z)(z^2-z-2)-z^2+z}{2};\ \frac{z^2-z+(1-2z)(z^2-z-2)}{2}\right)\quad \forall z\in\mathbb{N}$$

9

ეს ~~... ...~~ და ეს 4 არის აღნიშნული

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 56-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა № 13

25.04.2015/ მათ/III/ 609

ამოცანა № 3

გვერდი № 4

ამონახსნები, შემოწმება [illegible] რომ ჩასვლით, ~~[illegible]~~

შევამჩნიოთ რომ $(2) = -(3)$ და $(1) = -(4)$ ~~[illegible]~~ ასე

და შევიტყუებ $g(z) = \dfrac{z^2 - z + (2z-1)(z^2-z-2)}{2}$ ~~[illegible]~~

$$h(z) = \frac{(2z-1)(z^2-z-2) - z^2 + z}{2}$$

ანუ ამონახსნებია $(x;y) = \left[\begin{array}{l} (g(z);\ h(z)) \\ (h(z);\ g(z)) \\ (-g(z);\ -h(z)) \\ (-h(z);\ -g(z)) \end{array}\right.$ $\forall z \in \mathbb{N}$ სთვის.

პასუხი

10